古典幾何における内接五角形の面積公式

梅澤　瑠奈・小森　洋平・安井　拓朗

1. 序文

ユークリッド平面の三角形は、3 つの辺の長さを与えればその合同類が一意的に定まる。よって合同類の不変量である面積 S は、3 辺の長さ a, b, c から一意的に表すことができ、それは次のような Heron の公式として知られている。

$$S = \frac{\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{4}.$$

一方、菱形を考えれば分かるように、四角形は 4 つの辺の長さを与えてもその合同類は一意的に決まらない。そこで円に内接する四角形のみを考えることにすると、4 つの辺の長さを与えればその合同類は一意的に定まり、面積 S は 4 つの辺の長さ a, b, c, d を用いて次のように表される（Brahmagupta の公式）。

$$S = \frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4}.$$

一般に n が 5 以上の自然数とすると、円に内接する n 角形も各辺の長さを与えればその合同類は一意的に定まるので、面積は n 個の辺の長さで表すことができる。このことについて、松本たちは論文 [2] において次の結果を示した。

定理 1. [2, Theorem 1] ユークリッド幾何において、n が 5 以上の任意の内接 n 角形の面積を、辺の長さの四則演算とベキ根のみで表す一般の公式は存在しない。

この結果は n が 5 以上の任意の n 次代数方程式の解を四則演算とベキ根のみで表す一般の公式は存在しないというアーベル・ルフィニの定理を彷彿させる。この論文で我々は、松本たちの結果の類似が双曲幾何や球面幾何でも成り立つことを示す。

定理 2. 双曲幾何や球面幾何において、内接五角形の面積 S とその辺の長さ a, b, c, d, e に対し、$\cos\frac{S}{2}$ を $s(a)s(b), s(c), s(d), s(e)$ の四則演算とベキ根のみで表す一般の公式は存在しない。ここで双曲幾何の場合は $s(x) = \sinh\frac{x}{2}$ とし、球面幾何の場合は $s(x) = \sin\frac{x}{2}$ とする。

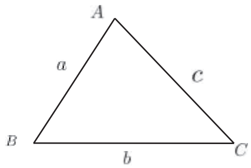
論文の構成は以下の通りである。まず 2 章でユークリッド幾何における松本たちの結果の証明の流れを順を追って紹介する。3 章では必要となる双曲幾何の結果を復習したのち、2 章の証明の流れを双曲幾何の立場から再確認してゆく。その際にユークリッド幾何での円に内接する多角形の辺の長さについて成り立つ同次式は、そのまま双曲幾何での円に内接する多角形の辺の長さについて成り立つ同次式に置き換えることができる点がポイントである（[1] を参照）。4 章では同様の考察を球面幾何で行う。

2. ユークリッド幾何における内接五角形の面積公式

この章では松本たちが論文 [2] で示した、ユークリッド幾何においては内接五角形の面積を辺の長さの四則演算とべき根で表す一般の公式が存在しないことについて、その証明の流れを順を追って説明していく。

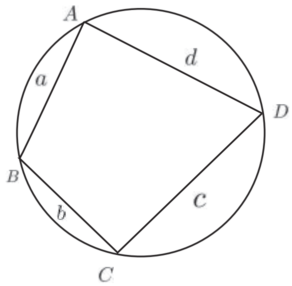
STEP 1. 三角形と円に内接する四角形の面積公式は古くから知られている。
Heron の公式　3 辺の長さが a, b, c である三角形 ABC の面積 S は $s = \frac{a+b+c}{2}$ とすると

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

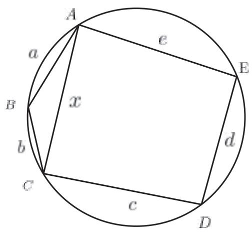


Brahmagupta の公式　円に内接する四つの辺の長さが a, b, c, d である四角形 ABCD の面積 S は $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ とすると

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$



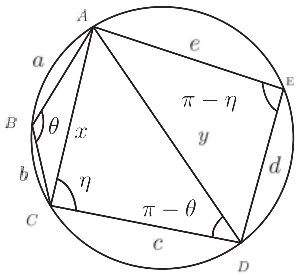
STEP 2. [2, lemma1]　図の五角形 $ABCDE$ に対して対角線 AC の辺の長さを x とすると、五角形の面積 S は三角形 ABC と四角形 $ACDE$ の面積の和なので、STEP 1 の面積公式を用いると次の式



$$2(a^2+b^2-c^2-d^2-e^2)x^2 - 8cdex + 16S^2 - a^4 - b^4 + c^4 + d^4 + e^4$$
$$-2(-a^2b^2 + c^2d^2 + d^2e^2 + e^2c^2) = 8S\sqrt{-x^4 + 2(a^2+b^2)x^2 - (a^2-b^2)^2}$$

が成り立ち、x は $\mathbb{Q}(a, b, c, d, e, S)$ 係数の 4 次式を満たす。このことからガロア理論より x は a, b, c, d, e, S の四則演算とべき根で表せることが分かる。

STEP 3.



図の五角形 $ABCDE$ に対して AC の長さを x、AD の長さを y とする。円に内接する四角形 $ABCD$ を対角線 AC で三角形 ABC と 三角形 ACD に分ける。$\angle ABC = \theta$ とすると対角 $\angle ADC$ は $\pi - \theta$ となり、分けたそれぞれの三角形に対して余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \\ &= c^2 + y^2 - 2cy\cos(\pi - \theta) \\ &= c^2 + y^2 + 2cy\cos\theta \end{aligned}$$

となる。そこで $\cos\theta$ を消去すると

$$x^2 = \frac{(a^2+b^2)cy + (c^2+y^2)ab}{ab+cy} \tag{1}$$

が得られる [2, lemma2]。同様の考察を四角形 $ACDE$ で行うと、 $\angle ACD = \eta$ として

$$y^2 = \frac{(x^2+c^2)de + (d^2+e^2)cx}{cx+de} \tag{2}$$

が得られる。(1), (2) の式から y を消去することで、x は次の $\mathbb{Q}(a,b,c,d,e)$ 係数の 7 次式を満たす。

$$\begin{aligned} &cdex^7 + (c^2d^2 + d^2e^2 + e^2c^2 - a^2b^2)x^6 \\ &+ cde\{(c^2+d^2+e^2) - 2(a^2+b^2)\}x^5 \\ &+ \{c^2d^2e^2 + 2a^2b^2(c^2+d^2+e^2) - 2(a^2+b^2)(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2)\}x^4 \\ &+ cde\{(a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2 - 2(a^2+b^2)(c^2+d^2+e^2)\}x^3 \\ &+ \{(a^2+b^2)^2(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2) - 2c^2d^2e^2(a^2+b^2) - a^2b^2(c^2+d^2+e^2)^2\}x^2 \\ &+ cde(c^2+d^2+e^2)(a^2-b^2)^2x + c^2d^2e^2(a^2-b^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

ここで $a = b$ とすると、上記の x の 7 次式から次の 5 次式が導かれる [2, lemma2]。

$$\begin{aligned} &cdex^5 + (c^2d^2 + d^2e^2 + e^2c^2 - a^4)x^4 \\ &+ cde\{(c^2+d^2+e^2) - 4a^2\}x^3 \\ &+ \{c^2d^2e^2 + 2a^4(c^2+d^2+e^2) - 4a^2(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2)\}x^2 \\ &+ 4a^2cde\{(2a^2 - (c^2+d^2+e^2)\}x \\ &+ a^2\{4a^2(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2) - 4c^2d^2e^2 - a^2(c^2+d^2+e^2)^2\} = 0. \end{aligned}$$

STEP 4. 辺の長さが $(a,b,c,d,e) = (1,1,2,3,4)$ であるような、円に内接する五角形が存在する [2, Proposition 4]。この時、対角線 AC の長さ x は次の 5 次方程式

$$f(x) = 8x^5 + 81x^4 + 200x^3 - 114x^2 - 864x - 723 = 0 \tag{3}$$

を満たす。$f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約で $f(x)$ のガロア群は S_5 と同型になり可解群ではない [2, lemma3]。

STEP 5. 以上からユークリッド幾何において、一般の内接五角形の面積が辺の長さの四則演算とべき根で表せないことを背理法で示す。五角形の面積 S が a,b,c,d,e の四則演算とべき根で表されると仮定する。STEP 2 より AC の長さ x は S,a,b,c,d,e の四則演算とべき根で表せる。背理法の仮定より S は a,b,c,d,e の四則演算とべき根で表せるので、x も a,b,c,d,e の四則演算とべき根で表せることになる。よってガロア理論より x の $\mathbb{Q}(a,b,c,d,e)$ 係数の最小多項式のガロア群は可解群になるはずだが、これは STEP 4 の結果に矛盾する。

3. 双曲幾何における内接五角形の面積公式

双曲幾何は 19 世紀に Bolyai や Lobachevsky といった数学者たちによって非ユークリッド幾何学の具体例として発見された。この章ではユークリッド幾何での松本たちの証明の流れが、双曲幾何においても成り立つことを説明する。その前に双曲幾何に関して必要な定義や定理を STEP 0 にまとめておく。

STEP 0.

3.1. **双曲幾何の単位円板モデル.** 双曲幾何の一つのモデルとして単位円板モデルを説明する。

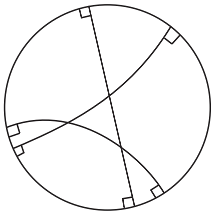
定義 1. 複素平面内の単位円板 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ の 2 点 $z,w\in\mathbb{D}$ の**双曲距離** $d_{\mathbb{D}}(z,w)$ を次のように定義する。

$$d_{\mathbb{D}}(z,w)=\log\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}.$$

距離空間 $(\mathbb{D},d_{\mathbb{D}})$ を双曲幾何の**単位円板モデル**という。

定義 2. 2 点を結ぶ曲線が**測地線**であるとは、曲線の長さが 2 点間の距離に一致することで、ユークリッド幾何での直線のことである。

定理 3. 単位円板モデルでの測地線は、図のように 2 点を通る境界に対して直交する円弧や直径になる。2 点を結ぶ測地線はただ一つ存在する。



定理 4. $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ への一次分数変換全体の成す群

$$PSU(1,1)=\left\{\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\mid |a|^2-|b|^2=1\right\}$$

の元 T と、$a,b\in\mathbb{D}$ に対して

$$d_{\mathbb{D}}(a,b)=d_{\mathbb{D}}(T(a),T(b))$$

となる。よって単位円板モデルの等長変換全体の成す群を $Isom(\mathbb{D})$ と表すと $PSU(1,1)\subset Isom(\mathbb{D})$ が成り立つ。 虚軸に関する鏡映と $PSU(1,1)$ で $Isom(\mathbb{D})$ は生成されている。

定理 5. 単位円板モデルでの一点 p から双曲距離が r の点全体はユークリッド円になる。これを等距離円と呼ぶ。ただし等距離円の中心 p は一般にユークリッド円の中心とは異なる。

定理 6. $PSU(1,1)$ は $\mathbb{D}$ に推移的に作用する。一次分数変換は複素平面上の円を円に移すので、単位円板モデルでの任意の等距離円は原点中心の円に移して考えることができる。

次の定理は松本たちの証明の流れが双曲幾何でも成り立つための重要な関係式である。

定理 7. 単位円板における原点中心のユークリッド半径 $0<r_E<1$ の円を、双曲幾何での原点中心の等距離円と見たときの双曲半径を r_h とする。このとき

$$r_E=\tanh\frac{r_h}{2}$$

が成り立つ。

3.2. **双曲多角形とその双曲面積.** ユークリッド幾何と同様に双曲幾何においても多角形やその面積について考えることができる。

定義 3. 単位円板モデルの中で有限個の測地線に囲まれた図形を**双曲多角形**という。多角形 $P \subset \mathbb{D}$ の**双曲面積**を

$$Area(P) = \int_P \frac{dxdy}{1-(x^2+y^2)^2}$$

と定義する。

定理 8 (Gauss-Bonnet **の定理**)**.** 双曲三角形 P の面積 $Area(P)$ 、角度をそれぞれ α, β, γ とすると

$$Area(P) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

が成り立つ。

定義 4. 単位円板モデルの中での二つの双曲三角形 A と B が**合同**であるとは、等長変換 $f \in Isom(\mathbb{D})$ が存在して $f(A) = B$ となることである。

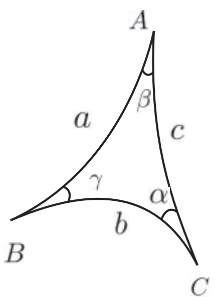
定理 9. ユークリッド幾何との類似で、余弦定理や正弦定理が下図の双曲三角形 ABC について成り立つ。このことから双曲三角形の合同条件が得られる。

正弦定理

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}.$$

余弦定理

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma.$$



STEP 1. ユークリッド幾何の場合と同様に、双曲幾何においても等距離円や直線（測地線）が存在するので、三角形や円に内接する四角形を考えることができる。例えば双曲三角形の面積 S を 3 つの辺の双曲長さ a, b, c で表す次の式は Heron の公式の類似である [4]。

$$\cos\frac{S}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}(s(a)^2+s(b)^2+s(c)^2)}{\sqrt{1+s(a)^2}\sqrt{1+s(b)^2}\sqrt{1+s(c)^2}}. \tag{4}$$

ここで $s(x) = \sinh\frac{x}{2}$ とする。同様に円に内接する双曲四角形の面積 S を 4 つの辺の双曲長さ a, b, c, d で表す次の式は Brahmagupta の公式の類似である [4, Theorem 3.4.]。

$$\cos\frac{S}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}(s(a)^2+s(b)^2+s(c)^2+s(d)^2)-s(a)s(b)s(c)s(d)}{\sqrt{1+s(a)^2}\sqrt{1+s(b)^2}\sqrt{1+s(c)^2}\sqrt{1+s(d)^2}}. \tag{5}$$

内接双曲四角形の面積公式 (5) において、4 つの辺のうちの 1 辺の双曲長さ、例えば d を 0 とすると双曲三角形の面積公式 (4) が得られることに注意する。

STEP 2. 内接双曲五角形 $ABCDE$ の面積を S とし、対角線 AC の双曲長さを x とする。双曲三角形 ABC と内接双曲四角形 $ACDE$ の面積をそれぞれ S_1, S_2 とすると、面積の加法性 $S = S_1 + S_2$ と cos の加法公式より

$$\cos\frac{S}{2} - \cos\frac{S_1}{2}\cos\frac{S_2}{2} = \sin\frac{S_1}{2}\sin\frac{S_2}{2}$$

となる。よって両辺を 2 乗して整理すると次の式が得られる。

$$\cos^2\frac{S_1}{2} + \cos^2\frac{S_2}{2} = 1 - \cos^2\frac{S}{2} + 2\cos\frac{S}{2}\cos\frac{S_1}{2}\cos\frac{S_2}{2}.$$

ここで $\cos\frac{S_1}{2}$ と $\cos\frac{S_2}{2}$ それぞれに双曲三角形の面積公式 (4) と内接双曲四角形の面積公式 (5) を使うと、次の式

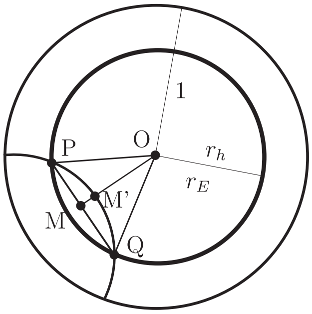
$$\begin{aligned}
& (s(a)^2 + s(b)^2 + s(x)^2 + 2)^2(1 + s(c)^2)(1 + s(d)^2)(1 + s(e)^2) \\
+ \;& (s(x)^2 + s(c)^2 + s(d)^2 + s(e)^2 + 2 - 2s(x)s(c)s(d)s(e))^2(1 + s(a)^2)(1 + s(b)^2) \\
= \;& 4(1 - \cos^2\frac{S}{2})(1 + s(x)^2)(1 + s(a)^2)(1 + s(b)^2)(1 + s(c)^2)(1 + s(d)^2)(1 + s(e)^2) \\
+ \;& 2\cos\frac{S}{2}(s(a)^2 + s(b)^2 + s(x)^2 + 2)(s(x)^2 + s(c)^2 + s(d)^2 + s(e)^2 + 2 - 2s(x)s(c)s(d)s(e)) \\
& \sqrt{1 + s(a)^2}\sqrt{1 + s(b)^2}\sqrt{1 + s(c)^2}\sqrt{1 + s(d)^2}\sqrt{1 + s(e)^2}
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって $s(x)$ は $\mathbb{Q}(s(a), s(b), s(c), s(d), s(e), \sqrt{1 + s(a)^2}, \sqrt{1 + s(b)^2}, \sqrt{1 + s(c)^2}, \sqrt{1 + s(d)^2}, \sqrt{1 + s(e)^2}, \cos\frac{S}{2})$ 係数４次式の根になる。このことからガロア理論より $s(x)$ は $s(a), s(b), s(c), s(d), s(e)$, $\cos\frac{S}{2}$ の四則演算とべき根で表せることが分かる。

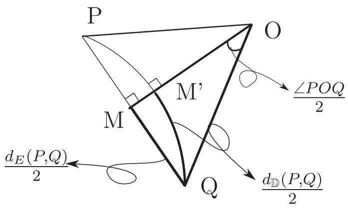
STEP 3.

ユークリッド距離と双曲距離の関係.

ユークリッド距離 $d_E(P,Q)$ と双曲距離 $d_{\mathbb{D}}(P,Q)$ の関係について [1] の議論を参考にしながら示していく。
円 C を原点中心半径 $0 < r_E < 1$ のユークリッド円とする。また C を双曲距離で原点からの等距離円と見たときの半径を r_h とする。



まず三角形 OPQ と双曲三角形 OPQ に注目する。O から直線 PQ に垂線を引きその足を M、測地線 PQ との交点を M' とする。また $\angle PMO$ と $\angle PM'O$ はともに直角である。



ここで双曲三角形 $OM'Q$ において、双曲幾何の正弦定理より次の式が成り立つ。

$$\frac{\sinh r_h}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\sinh \frac{d_{\mathbb{D}}(P,Q)}{2}}{\sin \frac{\angle POQ}{2}}.$$

また三角形 OMQ において、ユークリッド幾何の正弦定理より次の式が成り立つ。

$$\frac{r_E}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{d_E(P,Q)}{2}}{\sin \frac{\angle POQ}{2}}.$$

上記の二式から $\sin \frac{\angle POQ}{2}$ を消去することで、次の式を得る。

$$\sinh \frac{d_{\mathbb{D}}(P,Q)}{2} = \frac{\sinh r_h}{2r_E} \times d_E(P,Q).$$

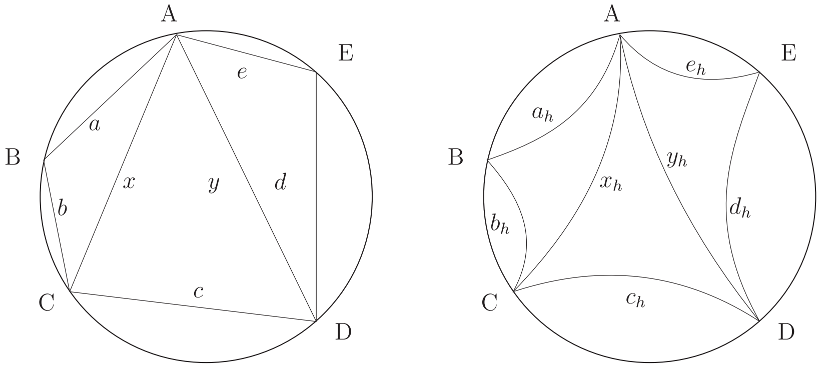
また定理 7 の $r_E = \tanh \frac{r_h}{2}$ という関係式より

$$\begin{aligned}\frac{\sinh r_h}{2r_E} &= \frac{2\sinh \frac{r_h}{2} \cosh \frac{r_h}{2}}{2\tanh \frac{r_h}{2}} \\ &= \cosh^2 \frac{r_h}{2} = \frac{1}{1-\tanh^2 \frac{r_h}{2}} \\ &= \frac{1}{1-r_E^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\sinh \frac{d_{\mathbb{D}}(P,Q)}{2} = \frac{1}{1-r_E^2} d_E(P,Q) \tag{6}$$

という半径 r_E に依存する比の関係が成り立つ。
2 章のユークリッド幾何での STEP 3 より左下図は次の等式を満たす。



$$
\begin{aligned}
& cdex^7+(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2-a^2b^2)x^6\\
& +cde\{(c^2+d^2+e^2)-2(a^2+b^2)\}x^5\\
& +\{c^2d^2e^2+2a^2b^2(c^2+d^2+e^2)-2(a^2+b^2)(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2)\}x^4\\
& +cde\{(a^2+b^2)^2+4a^2b^2-2(a^2+b^2)(c^2+d^2+e^2)\}x^3\\
& +\{(a^2+b^2)^2(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2)-2c^2d^2e^2(a^2+b^2)-a^2b^2(c^2+d^2+e^2)^2\}x^2\\
& +cde(c^2+d^2+e^2)(a^2-b^2)^2x+c^2d^2e^2(a^2-b^2)^2=0.
\end{aligned}
$$

この同次 10 次式に $\frac{1}{1-r_E^2}$ の 10 乗をかけると式 (6) より下の等式を得る。

$$
\begin{aligned}
& s(c)s(d)s(e)s(x)^7+(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2-s(a)^2s(b)^2)s(x)^6\\
& +s(c)s(d)s(e)\{(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)-2(s(a)^2+s(b)^2)\}s(x)^5\\
& +\{s(c)^2s(d)^2s(e)^2+2s(a)^2s(b)^2(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)\\
& -2(s(a)^2+s(b)^2)(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2)\}s(x)^4\\
& +s(c)s(d)s(e)\{(s(a)^2+s(b)^2)^2+4s(a)^2s(b)^2-2(s(a)^2+s(b)^2)(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)\}s(x)^3\\
& +\{(s(a)^2+s(b)^2)^2(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2)\\
& -2s(c)^2s(d)^2s(e)^2(s(a)^2+s(b)^2)-s(a)^2s(b)^2(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)^2\}s(x)^2\\
& +s(c)s(d)s(e)(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)(s(a)^2-s(b)^2)^2s(x)+s(c)^2s(d)^2s(e)^2(s(a)^2-s(b)^2)^2=0.
\end{aligned}
$$

ここで $s(a)=\sinh\frac{a_h}{2}$ とする。ただし a_h は a に対応する辺の双曲長さとする。この式で特に $s(a)=s(b)$ とすれば、2 章の STEP 3 の類似である次の式が導かれる。

$$
\begin{aligned}
& s(c)s(d)s(e)s(x)^5+(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2-s(a)^4)s(x)^4\\
& +s(c)s(d)s(e)\{(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)-4s(a)^2\}s(x)^3\\
& +\{s(c)^2s(d)^2s(e)^2+2s(a)^4(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)-4s(a)^2(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2)\}s(x)^2\\
& +4s(a)^2s(c)s(d)s(e)\{(2s(a)^2-(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)\}s(x)\\
& +s(a)^2\{4s(a)^2(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2)-4s(c)^2s(d)^2s(e)^2-s(a)^2(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)^2\}=0.
\end{aligned}
$$

STEP 4. 2 章の STEP 3 の 5 つの辺の長さ a,a,c,d,e と対角線 AC の長さ x に関する同次 8 次式において、ユークリッド幾何には相似の概念があるので、任意の正の実数 $\lambda>0$ に対し 5 つの辺の長さが $\lambda a,\lambda a,\lambda c,\lambda d,\lambda e$ かつ対角線 AC の長さが λx となる円に内接する五角形が存在して、a,c,d,e,x は上式と同じ同次 8 次式を満たす。ゆえに任意の $\lambda>0$ に対し 5 つの辺の長さが $\lambda,\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda$ かつ対角

線 AC の長さが λx となる円に内接するユークリッド五角形についても x は 2 章の STEP 4 の 5 次式 (3) を満たす。よって式 (6) より双曲幾何の円板モデルにおいて、十分大きな $k \in \mathbb{N}$ に対し 5 つの辺の双曲長さ a, b, c, d, e が $s(a) = s(b) = 1/k, s(c) = 2/k, s(d) = 3/k, s(e) = 4/k$ を満たすような双曲幾何における円に内接する五角形が存在し、対角線 AC の双曲長さ x に対し $s(x) = z/k$ とおくと、z は 5 次式 (3) と同じ式

$$8z^5 + 81z^4 + 200z^3 - 114z^2 - 864z - 723 = 0$$

を満たす。2 章の STEP 4 より、この方程式のガロア群は 5 次対称群と同型となり可解群ではないので、ガロア理論より $s(x)$ は $s(a), s(c), s(d), s(e)$ の四則演算とべき根で表せない。

STEP 5. 以上から双曲幾何において内接双曲五角形の面積 S と 5 つの辺の双曲長さ a, b, c, d, e に対し、$\cos\frac{S}{2}$ が $s(a), s(b), s(c), s(d), s(e)$ の四則演算とべき根で表せないことを背理法で示す。$\cos\frac{S}{2}$ が $s(a), s(b), s(c), s(d), s(e)$ の四則演算とべき根で表されると仮定する。STEP 2 より AC の双曲長さ x に対し、$s(x)$ は $s(a), s(b), s(c), s(d), s(e), \cos\frac{S}{2}$ の四則演算とべき根で表せる。背理法の仮定より $\cos\frac{S}{2}$ は $s(a), s(b), s(c), s(d), s(e)$ の四則演算とべき根で表せるので、$s(x)$ も $s(a), s(b), s(c), s(d), s(e)$ の四則演算とべき根で表せることになる。よってガロア理論より $s(x)$ の $\mathbb{Q}(s(a), s(b), s(c), s(d), s(e))$ 係数の最小多項式のガロア群は可解群になるはずだが、これは STEP 4 の結果に矛盾する。

4. 球面幾何における内接五角形の面積公式

STEP 0.

4.1. **球面距離.** 3 次元空間内の単位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に球面距離を考えて距離空間にする。また測地線や等長変換を球面幾何で考察する。

定義 5. S^2 上の 2 点 P, Q を結ぶ曲線 $\ell : [0, 1] \to S^2$ に対して、立体射影 $\varphi : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ との合成を $\ell_1 = \varphi \circ \ell$ とする。このとき

$$Leg_S(\ell) = \int \frac{2}{1 + \ell_1(t)^2} \left| \frac{d\ell_1}{dt} \right| dt$$

に対して $d_S(P, Q) = \inf Leg_S(\ell)$ を**球面距離**と定義する。

定義 6. S^2 を原点を通る平面で切った切り口の円を**大円**という。S^2 上の 2 点間を結ぶ曲線が**測地線**とは、2 点を通る大円の短い方の弧のこととする。

定理 10. 一次分数変換 $T \in PSU(2)$ は球面上の等長変換になる。ここで $z_0 \in S$ に対して

$$T(z) = \frac{z - z_0}{1 + \overline{z_0} z}$$

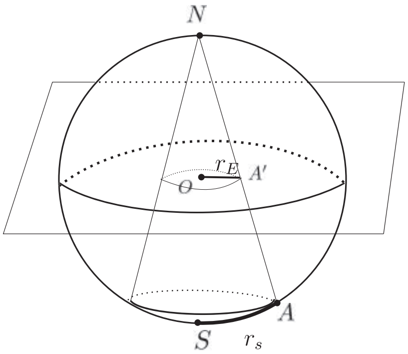
である。

次の定理は松本たちの証明の流れが球面幾何でも成り立つための重要な関係式である。

定理 11. 球面上の点 A に対して立体射影した点を A' とするとき、平面上の OA' のユークリッド長さを r_E とする。一方 AS の球面長さを r_s とすると、$r_s = \theta$ より

$$r_E = \tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{r_s}{2}$$

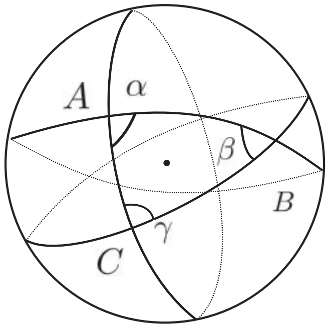
が成り立つ。



4.2. **球面多角形とその球面面積.** ユークリッド幾何と同様に球面幾何でも多角形や面積について考えることができる。

定理 12 (Gauss Bonnet の定理)**.** n 個の大円で囲まれた領域を**球面 n 角形**といい、特に下図のように三つの大円で囲まれた部分を**球面三角形**という。球面三角形 P の三つの角を α, β, γ とすると

$$Area(P) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

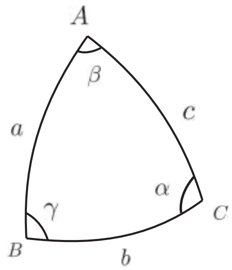


定理 13. ユークリッド幾何との類似で、余弦定理や正弦定理が下図の球面三角形 ABC について成り立つ.
正弦定理

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

余弦定理

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$



STEP 1. ユークリッド幾何の場合と同様に、球面幾何においても 1 点からの等距離円や直線（測地線）が存在するので、三角形や円に内接する四角形を考えることができる。例えば球面三角形の面積 S を 3 つの辺の球面長さ a, b, c で表す次の式は Heron の公式の類似である [3]。

$$\cos\frac{S}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}(s(a)^2+s(b)^2+s(c)^2)}{\sqrt{1-s(a)^2}\sqrt{1-s(b)^2}\sqrt{1-s(c)^2}} \tag{7}$$

ここで $s(x)=\sin\frac{x}{2}$ とする。同様に円に内接する球面四角形の面積 S を 4 つの辺の球面長さ a, b, c, d で表す次の式は Brahmagupta の公式の類似である [3, Page 182, Proposition 5]。

$$\cos\frac{S}{2} = \frac{1-\frac{1}{2}(s(a)^2+s(b)^2+s(c)^2+s(d)^2)-s(a)s(b)s(c)s(d)}{\sqrt{1-s(a)^2}\sqrt{1-s(b)^2}\sqrt{1-s(c)^2}\sqrt{1-s(d)^2}} \tag{8}$$

球面四角形の面積公式 (8) において 4 つの辺のうちの 1 辺の球面長さ、例えば d を 0 とすると球面三角形の面積公式 (7) が得られることに注意する。

STEP 2. 内接球面五角形 $ABCDE$ の面積を S とし、対角線 AC の球面長さを x とする。球面三角形 ABC と内接球面四角形 $ACDE$ の面積をそれぞれ S_1, S_2 とすると、面積の加法性 $S=S_1+S_2$ と cos の加法公式より

$$\cos\frac{S}{2}-\cos\frac{S_1}{2}\cos\frac{S_2}{2}=\sin\frac{S_1}{2}\sin\frac{S_2}{2}$$

となる。よって両辺を 2 乗して整理すると次の式が得られる。

$$\cos^2\frac{S_1}{2}+\cos^2\frac{S_2}{2}=1-\cos^2\frac{S}{2}+2\cos\frac{S}{2}\cos\frac{S_1}{2}\cos\frac{S_2}{2}.$$

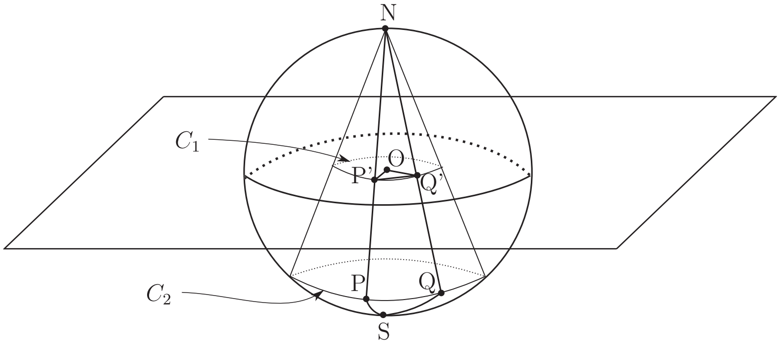
ここで $\cos\frac{S_1}{2}$ と $\cos\frac{S_2}{2}$ それぞれに球面三角形の面積公式 (7) と内接球面四角形の面積公式 (8) を使うと

$$\begin{aligned}
& (s(a)^2+s(b)^2+s(x)^2-2)^2(1-s(c)^2)(1-s(d)^2)(1-s(e)^2) \\
+\ & (s(x)^2+s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2-2+2s(x)s(c)s(d)s(e))^2(1-s(a)^2)(1-s(b)^2) \\
=\ & 4(1-\cos^2\frac{S}{2})(1-s(x)^2)(1-s(a)^2)(1-s(b)^2)(1-s(c)^2)(1-s(d)^2)(1-s(e)^2) \\
+\ & 2\cos\frac{S}{2}(s(a)^2+s(b)^2+s(x)^2-2)(s(x)^2+s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2-2+2s(x)s(c)s(d)s(e)) \\
& \sqrt{1-s(a)^2}\sqrt{1-s(b)^2}\sqrt{1-s(c)^2}\sqrt{1-s(d)^2}\sqrt{1-s(e)^2}.
\end{aligned}$$

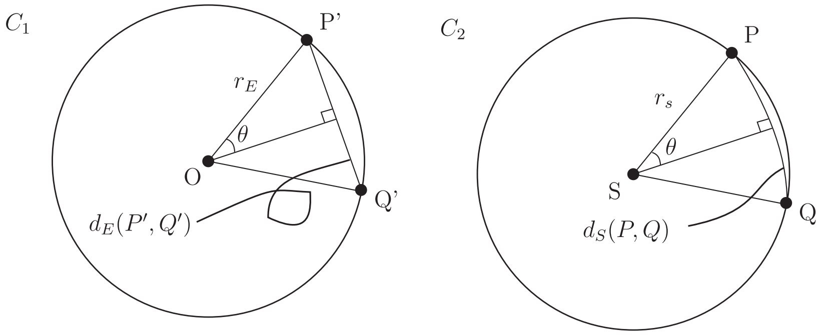
よって $s(x)$ は
$\mathbb{Q}(s(a), s(b), s(c), s(d), s(e), \sqrt{1-s(a)^2}, \sqrt{1-s(b)^2}, \sqrt{1-s(c)^2}, \sqrt{1-s(d)^2}, \sqrt{1-s(e)^2}, \cos\frac{S}{2})$ 係数 4 次式の根になる。このことからガロア理論より $s(x)$ は $s(a), s(b), s(c), s(d), s(e), \cos\frac{S}{2}$ の四則演算とべき根で表せることが分かる。

STEP3.

ユークリッド距離と球面距離の関係． ユークリッド距離 $d_E(P', Q')$ と球面距離 $d_S(P, Q)$ の関係について [1] の議論を参考に説明する。下図のように C_2 を底面とし N から伸びる円錐を考えると平面と交わり平面上に円ができそれを O を中心とする円 C_1 とする。



C_1 のユークリッド距離での半径を r_E とし、C_2 の球面距離での半径を r_s とする。
下図から正弦定理を用いて $d_E(P', Q')$ と $d_S(P, Q)$ の関係を示していく。



C_2 の図において $\theta = \frac{\angle PSQ}{2}$ とする。球面幾何の正弦定理より

$$\frac{\sin \frac{d_S(P,Q)}{2}}{\sin \theta} = \frac{\sin r_s}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

なので

$$\sin \theta = \frac{\sin \frac{d_S(P,Q)}{2}}{\sin r_s}$$

となる。一方 C_1 の図において

$$d_E(P', Q') = 2r_E \sin \theta = 2r_E \frac{\sin \frac{d_S(P,Q)}{2}}{\sin r_s}$$

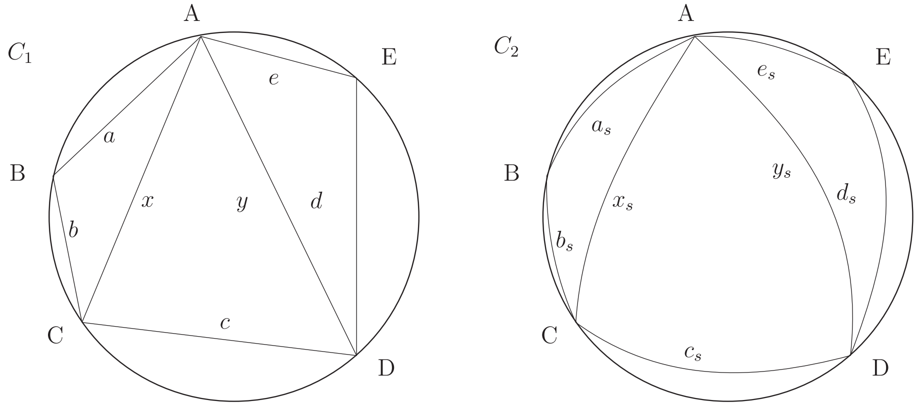
なので $r_E = \tan \frac{r_s}{2}$ という関係式から

$$\begin{aligned} \frac{\sin r_s}{2r_E} &= \frac{2 \sin \frac{r_s}{2} \cos \frac{r_s}{2}}{2 \tan \frac{r_s}{2}} = \cos^2 \frac{r_s}{2} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{r_s}{2}} = \frac{1}{1 + r_E^2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\sin\frac{d_S(P,Q)}{2}=\frac{1}{1+r_E^2}d_E(P',Q') \tag{9}$$

という半径 r_E に依存する比の関係が成り立つ。
2 章のユークリッド幾何での STEP 3 より左下図は次の等式を満たす。



$$\begin{aligned}
&cdex^7+(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2-a^2b^2)x^6\\
&+cde\{(c^2+d^2+e^2)-2(a^2+b^2)\}x^5\\
&+\{c^2d^2e^2+2a^2b^2(c^2+d^2+e^2)-2(a^2+b^2)(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2)\}x^4\\
&+cde\{(a^2+b^2)^2+4a^2b^2-2(a^2+b^2)(c^2+d^2+e^2)\}x^3\\
&+\{(a^2+b^2)^2(c^2d^2+d^2e^2+e^2c^2)-2c^2d^2e^2(a^2+b^2)-a^2b^2(c^2+d^2+e^2)^2\}x^2\\
&+cde(c^2+d^2+e^2)(a^2-b^2)^2x+c^2d^2e^2(a^2-b^2)^2=0.
\end{aligned}$$

この同次 10 次式に $\frac{1}{1+r_E^2}$ の 10 乗をかけると式 (9) より下の等式を得る。

$$\begin{aligned}
&s(c)s(d)s(e)s(x)^7+(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2-s(a)^2s(b)^2)s(x)^6\\
&+s(c)s(d)s(e)\{(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)-2(s(a)^2+s(b)^2)\}s(x)^5\\
&+\{s(c)^2s(d)^2s(e)^2+2s(a)^2s(b)^2(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)\\
&-2(s(a)^2+s(b)^2)(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2)\}s(x)^4\\
&+s(c)s(d)s(e)\{(s(a)^2+s(b)^2)^2+4s(a)^2s(b)^2-2(s(a)^2+s(b)^2)(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)\}s(x)^3\\
&+\{(s(a)^2+s(b)^2)^2(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2)\\
&-2s(c)^2s(d)^2s(e)^2(s(a)^2+s(b)^2)-s(a)^2s(b)^2(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)^2\}s(x)^2\\
&+s(c)s(d)s(e)(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)(s(a)^2-s(b)^2)^2s(x)+s(c)^2s(d)^2s(e)^2(s(a)^2-s(b)^2)^2=0.
\end{aligned}$$

ここで $s(a)=\sin\frac{a_s}{2}$ とする。ただし a_s は a に対応する辺の球面長さとする。この式で特に $s(a)=s(b)$ とすれば、2 章の STEP 3 の類似である次の式が導ける。

$$
\begin{aligned}
&s(c)s(d)s(e)s(x)^5+(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2-s(a)^4)s(x)^4\\
&+s(c)s(d)s(e)\{(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)-4s(a)^2\}s(x)^3\\
&+\{s(c)^2s(d)^2s(e)^2+2s(a)^4(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)-4s(a)^2(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2)\}s(x)^2\\
&+4s(a)^2s(c)s(d)s(e)\{(2s(a)^2-(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)\}s(x)\\
&+s(a)^2\{4s(a)^2(s(c)^2s(d)^2+s(d)^2s(e)^2+s(e)^2s(c)^2)-4s(c)^2s(d)^2s(e)^2-s(a)^2(s(c)^2+s(d)^2+s(e)^2)^2\}=0.
\end{aligned}
$$

STEP 4. 3 章の STEP 4 の議論より、任意の $\lambda>0$ に対し 5 つの辺の長さが $\lambda,\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda$ かつ対角線 AC の長さが λx となる円に内接するユークリッド五角形についても x は 2 章の STEP 4 の 5 次式 (3) を満たす。よって式 (9) より、十分大きな $k\in\mathbb{N}$ に対し 5 つの辺の球面長さ a,b,c,d,e が $s(a)=s(b)=1/k, s(c)=2/k, s(d)=3/k, s(e)=4/k$ を満たすような球面幾何における円に内接する五角形が存在し、対角線 AC の球面長さ x に対し $s(x)=z/k$ とおくと、z は $f(x)$ と同じ 5 次式

$$8z^5+81z^4+200z^3-114z^2-864z-723=0$$

を満たす。2 章の STEP 4 より、この方程式のガロア群は 5 次対称群と同型となり可解群ではないので、ガロア理論より $s(x)$ は $s(a),s(c),s(d),s(e)$ の四則演算とべき根で表せない。

STEP 5. 以上から球面幾何において内接球面五角形の面積 S と 5 つの辺の球面長さ a,b,c,d,e に対し、$\cos\frac{S}{2}$ が $s(a),s(b),s(c),s(d),s(e)$ の四則演算とべき根で表せないことを背理法で示す。$\cos\frac{S}{2}$ が $s(a),s(b),s(c),s(d),s(e)$ の四則演算とべき根で表されると仮定する。STEP 2 より $x=AC$ に対し、$s(x)$ は $s(a),s(b),s(c),s(d),s(e),\cos\frac{S}{2}$ の四則演算とべき根で表せる。背理法の仮定より $\cos\frac{S}{2}$ は $s(a),s(b),s(c),s(d),s(e)$ の四則演算とべき根で表せるので、$s(x)$ も $s(a),s(b),s(c),s(d),s(e)$ の四則演算とべき根で表せることになる。よってガロア理論より $s(x)$ の $\mathbb{Q}(s(a),s(b),s(c),s(d),s(e))$ 係数の最小多項式のガロア群は可解群になるはずだが、これは STEP 4 の結果に矛盾する。

［References］

[1] R. Guo and N. Sönmez: Cyclic polygons in classical geometry, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, 64:2 (2011), 185–194.

[2] Y. Matsumoto, Y. Matsutani, M. Oka, T. Sakai and T. Shibuya: On the area of a polygon inscribed in a circle, L'Enseignement Mathematique (2) 53 (2007), 127–153.

[3] W. M'Clelland and T. Preston: A Treatise on Spherical Trigonometry with application to Spherical Geometry and Numerous Examples. Part II, London: Macmillian and Co., 1886.

[4] A. Mednykh: Brahmagupta formula for cyclic quadrilaterials in the hyperbolic plane. Sib. Elektron. Mat. Izv. 9 (2012), 247–255.